Formelsammlung Stochastik

Unterstützen Sie meine Arbeit durch eine Spende.
http://www.fersch.de
Jeder Spender erhält eine verbesserte und erweiterte Formelsammlung.

©Klemens Fersch

7. Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

5 Stochastik **2**
5.1 Statistik . . . 2
5.1.1 Median - Quartil . . . 2
5.1.2 Häufigkeitstabelle - Modalwert . . . 3
5.1.3 Boxplot . . . 3
5.1.4 Mittelwert - Varianz - Standartabweichung . . . 4
5.2 Kombinatorik . . . 5
5.2.1 Grundlagen . . . 5
5.2.2 Anzahl der Anordungen - Permutation . . . 5
5.2.3 Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation . . . 5
5.2.4 Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination . . . 6
5.3 Wahrscheinlichkeit . . . 7
5.3.1 Zufallsexperiment . . . 7
5.3.2 Relative Häufigkeit . . . 8
5.3.3 Wahrscheinlichkeit . . . 9
5.3.4 Mehrstufige Zufallsexperimente . . . 10
5.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 11
5.3.6 Vierfeldertafel . . . 12
5.4 Diskrete Verteilung . . . 15
5.4.1 Grundlagen . . . 15
5.4.2 Diskrete Gleichverteilung . . . 16
5.4.3 Binomialverteilung . . . 17
5.4.4 Hypergeometrische Verteilung . . . 21
5.4.5 Poissonverteilung . . . 22
5.5 Stetige Verteilung . . . 23
5.5.1 Grundlagen . . . 23
5.5.2 Stetige Gleichverteilung . . . 23
5.5.3 Normalverteilung . . . 24
5.5.4 Exponentialverteilung . . . 26
5.6 Testen von Hypothesen . . . 27
5.6.1 Einseitiger Signifikanztest . . . 27

5 Stochastik

5.1 Statistik

5.1.1 Median - Quartil

• Anzahl der Elemente: n
• Geordnete Datenreihe: Liste von Werten, die aufsteigend der Größe nach sortiert sind.
• Minimum: kleinster Wert der Datenreihe
• Maximum: größter Wert der Datenreihe
• Spannweite: Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der Datenreihe.
• Median (Zentralwert): Mittlerer Wert der Datenreihe
$Q_2 = \frac{x_{n/2}+x_{n/2+1}}{2}$ wenn n gerade
$Q_2 = x_{(n+1)/2}$ wenn n ungerade
• Unteres Quartil Q_1: 25 % der Daten sind kleiner als dieser Wert
• Oberes Quartil Q_3: 75 % der Daten sind kleiner als dieser Wert
• Für die Berechnung des unteren und oberen Quartils gibt es verschiedene Methoden. Die Median-Methode wird häufig in der Schule verwendet. Dieser teilt die Daten in eine untere und eine obere Hälfte.
Unteres Quartil: Der Median der unteren Hälfte.
Oberes Quartil: Der Median der oberen Hälfte.

Noten in Mathematik von Max (Datenreihe 1):
4,3,5,3,3,5,2,4
Geordnete Datenreihe 1 $n = 8$ (gerade)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	3	3	3	4	4	5	5

Minimum: $x_1 = 2$
Maximum: $x_8 = 5$
Spannweite: $d = x_8 - x_1 = 5 - 2 = 3$
Median: $Q_2 = \frac{x_4+x_5}{2} = \frac{3+4}{2} = 3,5$
Untere Hälfte

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	3	3

Unteres Quartil $Q_1 = \frac{x_2+x_3}{2} = \frac{3+3}{2} = 3,0$
Obere Hälfte

x_5	x_6	x_7	x_8
4	4	5	5

Oberes Quartil $Q_3 = \frac{x_6+x_7}{2} = \frac{4+5}{2} = 4,5$

Noten in Mathematik von Moritz (Datenreihe 2):
1,2,3,3,2,5,6
Geordnete Datenreihe 2 $n = 7$ (ungerade)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	2	2	3	3	5	6

Minimum: $x1 = 1$
Maximum: $x_7 = 6$
Spannweite: $d = x_7 - x_1 = 6 - 1 = 5$
Median: $Q_2 = x_4 = 3$
F Untere Hälfte

x_1	x_2	x_3
1	2	2

Unteres Quartil $Q_1 = x_2 = 2$
Obere Hälfte

x_5	x_6	x_7
3	5	6

Oberes Quartil $Q_3 = x_6 = 5$

[*Statistik*]

5.1.2 Häufigkeitstabelle - Modalwert

• Modalwert
Wert aus der Datenreihe, der am häufigsten vorkommt.
• Bimodale Modalwerte
Zwei Werte kommen gleich häufig vor.
• Multimodale Modalwerte
Mehre Werte kommen gleich häufig vor.

Noten in Mathematik von Max (Datenreihe 1):
4,3,5,3,3,5,2,4
Häufigkeit Datenreihe1

Anzahl	Noten
1	2
3	3
2	4
2	5

Modalwert: $x_{Mod} = 3$

Noten in Mathematik von Moritz (Datenreihe 2):
1,2,3,3,2,5,6
Häufigkeit der Datenreihe 2

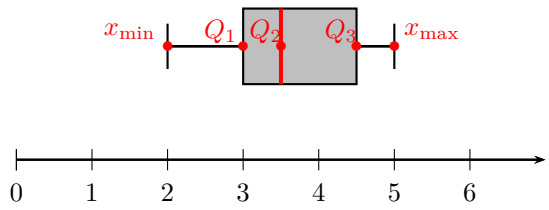
Anzahl	Daten
1	1
2	2
2	3
1	5
1	6

Bimodale Modalwerte: $x_{Mod1} = 2 \quad x_{Mod2} = 3$

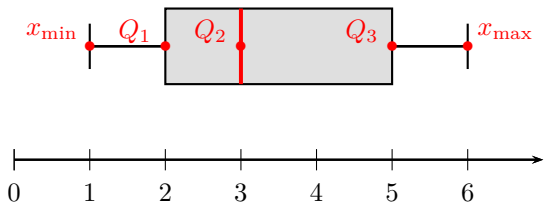
[*Statistik*]

5.1.3 Boxplot

Boxplot der Datenreihe 1



Boxplot der Datenreihe 2



•Boxplot: Grafische Darstellung einer Datenreihe.
• Box (der Kasten):Der Bereich zwischen dem unteren Q_1 und oberen Quartil Q_3 .
• Vertikale Linie in der Box: Median Q_2
• Whiskers (Antennen): Linien, die vom Kastenende (Q_1/Q_3) bis zum Minimum/Maximum gehen.

Datenreihe 1: 4,3,5,3,3,5,2,4
Minimum: $x_{\min} = 2$; Unteres Quartil: $Q_1 = 3$; Median: $Q_2 = 3,5$; Oberes Quartil $Q_3 = 4,5$; Maximum: $x_{\max} = 5$
Datenreihe 2: 1,2,3,3,2,5,6
Minimum: $x_{\min} = 1$; Unteres Quartil: $Q_1 = 2$; Median: $Q_2 = 3$; Oberes Quartil $Q_3 = 5$; Maximum: $x_{\max} = 6$

[*Statistik*]

5.1.4 Mittelwert - Varianz - Standartabweichung

Arithmetisches Mittel

Durchschnittswert $\bar{x}$ der Datenreihe:
$x_1, x_2, x_3....x_n$
n - Anzahl der Elemente
$\bar{x}_{arith} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3....x_n)$
$\bar{x}_{arith} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Datenreihe 1:4, 3, 5, 3, 3, 5, 2, 4
$\bar{x} = \frac{1}{8}(4+3+5+3+3+5+2+4) = \frac{29}{8} = 3,625$

Geometrische Mittel

Zentralwert der geordneten Datenreihe
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{8} x_i}$

Datenreihe 1: 4, 3, 5, 3, 3, 5, 2, 4
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[8]{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4}$
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[8]{21600}$
$\bar{x}_{geom} = 3,4818.$

Harmonische Mittel

$\bar{x}_{harm} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$
$\bar{x}_{harm} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

Datenreihe 1: 4, 3, 5, 3, 3, 5, 2, 4
$\bar{x}_{harm} = \frac{8}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$
$\bar{x}_{harm} = \frac{8}{\frac{12}{5}}$
$\bar{x}_{harm} = \frac{10}{3}$
$\bar{x}_{harm} = 3,333$

Varianz-Standartabweichung

Datenreihe: $x_1, x_2, x_3....x_n$
$\bar{x}$ - Mittelwert der Datenreihe
•Alle möglichen Werte(Empirische Varianz): n
$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$
$s^2 = \frac{1}{n}((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2)$
Standartabweichung: $s = \sqrt{s^2}$
• Stichprobe mit korrigierter Stichprobenvarianz: $n - 1$
$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$
$s^2 = \frac{1}{n-1}((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2)$
Standartabweichung: $s = \sqrt{s^2}$

Datenreihe 1: 4,3,5,3,3,5,2,4
Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{29}{8}$
•Alle möglichen Werte(Empirische Varianz):8
$s^2 = \frac{1}{8}\left(4 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(3 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(5 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(3 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(3 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(5 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(2 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(4 - \frac{29}{8}\right)^2$
$s^2 = \frac{113}{8} - \left(\frac{29}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$
$s = \sqrt{s^2} = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0,9922$
• Stichprobe mit korrigierter Stichprobenvarianz: $8 - 1 = 7$
$s^2 = \frac{1}{7}\left(4 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(3 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(5 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(3 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(3 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(5 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(2 - \frac{29}{8}\right)^2 + \left(4 - \frac{29}{8}\right)^2$
$s^2 = \frac{1}{7} \cdot \frac{63}{8}\ s^2 == \frac{9}{8} = 1,125$
$s = \sqrt{s^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1,0607$

[*Statistik*]

5.2 Kombinatorik

5.2.1 Grundlagen

	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung
Permutation	$n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!}$
Variation	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$	n^k
Kombination	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Fakultät

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$0! = 1$
$1! = 1$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n über k

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$
$\binom{40}{38} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{(40-38)!\cdot 38!} = \frac{40\cdot 39}{1\cdot 2} = 780$
$\binom{2}{0} = 1$ $\binom{2}{1} = 2$ $\binom{2}{2} = 1$

[$n!$]

5.2.2 Anzahl der Anordungen - Permutation

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - alle Elemente verschieden

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,c bilden?
abc *acb* *bac* *bca* *cab* *cba*
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - nicht alle Elemente verschieden

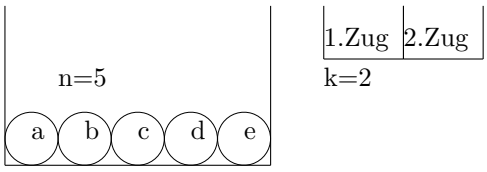
$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,b,b,b bilden?
a,b,b,b,b b,a,b,b,b b,b,a,b,b b,b,b,a,b b,b,b,b,a
$\frac{5!}{4!} = 5$

[$n!$]

5.2.3 Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

	ab	ac	ad	ae
ba		bc	bd	be
ca	cb		cd	ce
da	db	dc		de
ea	eb	ec	ed	

1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 4 Möglichkeiten

$5 \cdot 4 = 20 = \frac{5!}{(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$n^k$$

aa	ab	ac	ad	ae
ba	bb	bc	bd	be
ca	cb	cc	cd	ce
da	db	dc	dd	de
ea	eb	ec	ed	ee

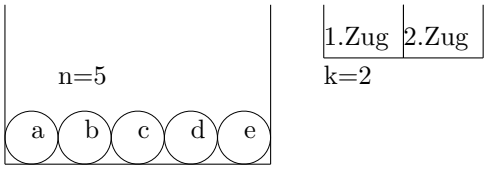
1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 5 Möglichkeiten

$5 \cdot 5 = 25 = 5^2$ Möglichkeiten

[$\frac{n!}{(n-k)!}$][n^k]

5.2.4 Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad n \text{ über } k$$

ab	ac	ad	ae
	bc	bd	be
		cd	ce
			de

$\frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$\binom{n+k-1}{k}$$

aa	ab	ac	ad	ae
	bb	bc	bd	be
		cc	cd	ce
			dd	de
				ee

$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ Möglichkeiten

[$\binom{n}{k}$][$\binom{n+k-1}{k}$]

5.3 Wahrscheinlichkeit

5.3.1 Zufallsexperiment

Ergebnis - Ereignis

- Ein Zufallsexperiment ist beliebig oft wiederholbar
- Die Elementarergebnisse (Stichproben, Ausgänge) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...$ des Zufallsexperiment sind nicht vorhersagbar
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω
- $|\Omega|$ ist die Anzahl der Ergebnisse von Ω
- Ein Ergeignis A ist eine Teilmenge von Ω
- $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A
- Die Menge aller Ergeinisse heißt Ereignisraum P

Werfen einer Münze
Ergebnis: $\omega_1 = Wappen(W)$ $\omega_2 = Zahl(Z)$
Ergebnismenge: $\Omega = \{W, Z\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 2$
Ereignis: $A = \{W\}$
Ereignis: $B = \{Z\}$

Werfen eines Würfels
Ergebnis: $\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 2$ $\omega_3 = 3$
$\omega_4 = 4$ $\omega_5 = 5$ $\omega_6 = 6$
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 6$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Anzahl der Elemente von $|A| = 4$
Gegenereignis: $\overline{B} = \{2, 4\}$
Anzahl der Elemente von$|\overline{B}| = 2$

Schnittmenge $\cap$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$
Alle Ergebnisse die in A und zugleich in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
Alle Ergebnisse die in A oder B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Differenz $\setminus$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$
Alle Ergebnisse die in A, aber nicht in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{1\}$

Gegenereignis $\overline{A}$

$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Alle Ergebnisse die in Ω, aber nicht in A enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Gegenerreignis: $\overline{A} = \{2, 4\}$

Vereinbare - unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\} \Leftrightarrow$ unvereinbare Ereignisse
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{a, b...\} \Leftrightarrow$ vereinbare Ereignisse

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{3, 4, 5\}$
Ereignis: $C = \{1, 2\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$ vereinbare Ereignisse
$\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{\}$ unvereinbare Ereignisse

Rechengesetze

• Kommutativgesetz
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
• Assoziativgesetz
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
• Distributivgesetz
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
• De Morgan
$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$
$\overline{\overline{A}} = A$
• Neutrales Element
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
•Inverses Element
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} =$Grundmenge

5.3.2 Relative Häufigkeit

Definition

$h_n(A) = \frac{k}{n}$
n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs
A - Ereignis
k - Absolute Häufigkeit von A
$h(A)$ - Relative Häufigkeit von A

Eigenschaften

- $0 \leq h(A) \leq 1$
- $h(\emptyset) = 0$
- $h(\Omega) = 1$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B) - h(A \cap B)$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $h(A) = 1 - h(\overline{A})$

[$h_n(A) = \frac{k}{n}$]

5.3.3 Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$P(A) = \frac{k}{n}$
Voraussetzung: Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich
n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs
A - Ereignis
k - Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse für A
$P(A)$- Wahrscheinlichkeit von A

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich:
$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$
Anzahl aller möglichen Versuchsergebnisse: $n = |\Omega| = 6$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse: $k = |A| = 4$
Wahrscheinlichkeit von A
$P(A) = \frac{4}{6}$

Eigenschaften

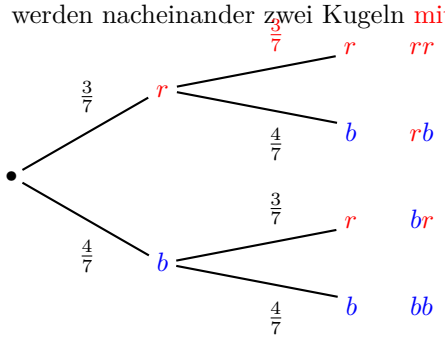
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3, 5\}$
$P(A) = \frac{3}{6}$
$P(B) = \frac{4}{6}$
$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

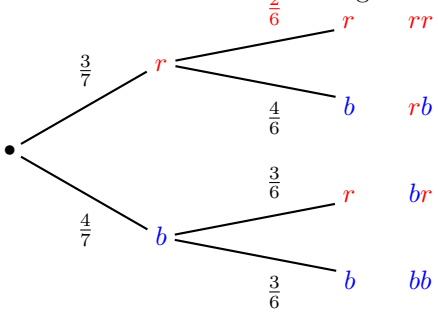
[$P(A) = \frac{k}{n}$]

5.3.4 Mehrstufige Zufallsexperimente

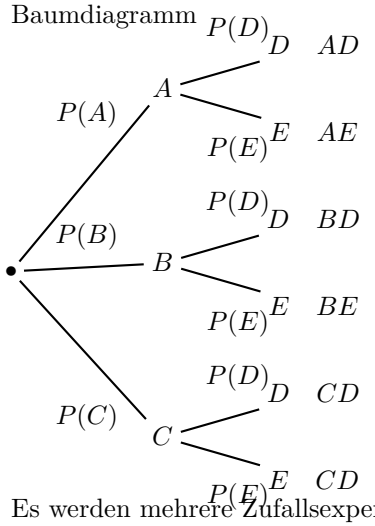
In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.



In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



Baumdiagramm



Es werden mehrere Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt. Jedes mögliche Elementarereignis wird zu einem Knoten (A,B,C..) im Baumdiagramm.

Zufallsexperiment 1: $\Omega = \{A, B, C\}$

Zufallsexperiment 2: $\Omega = \{D, E\}$

Die Knoten werden durch Pfade verbunden und die Wahrscheinlichkeiten angetragen. (P(A),P(B)...)

Die Wahrscheinlichkeiten an einem Knoten müssen sich zu 1 addieren.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (AD,AE..)ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

$P(AD) = P(A) \cdot P(D) \qquad P(AE) = P(A) \cdot P(E)$

$P(BD) = P(B) \cdot P(D) \qquad P(BE) = P(B) \cdot P(E)$

$P(CD) = P(C) \cdot P(D) \qquad P(CE) = P(C) \cdot P(E)$

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse .

$P(AD, CD) = P(AD) + P(CD)$

Ziehen mit Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Wahrscheinlichkeit für nur gleichfarbige Kugeln

E = {rr;bb}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rr) + P(bb) = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}$

Ziehen ohne Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

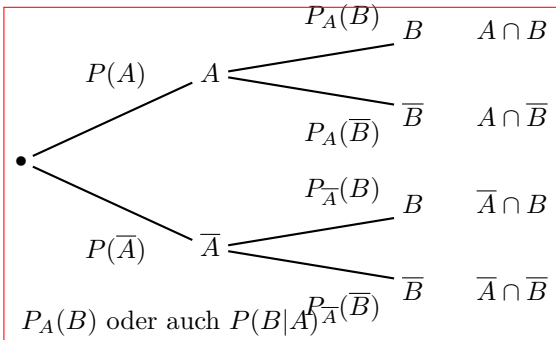
Wahrscheinlichkeit für genau 1 rote Kugel

E = {rb;br}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rb) + P(br) = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42}$

5.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

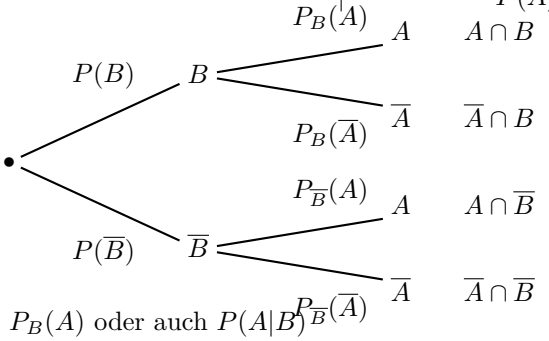


$P_A(B)$ oder auch $P(B|A)$

Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A. Die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad | \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) \quad | \quad P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) \quad | \quad P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) \quad | \quad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})}$$



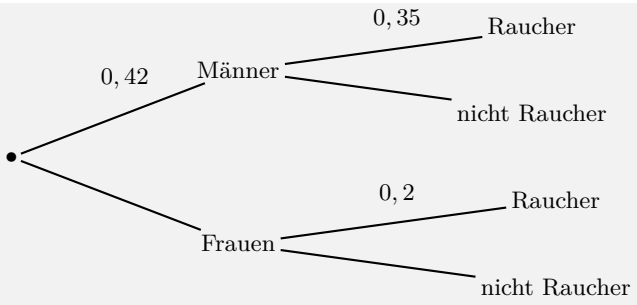
$P_B(A)$ oder auch $P(A|B)$

Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn B schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

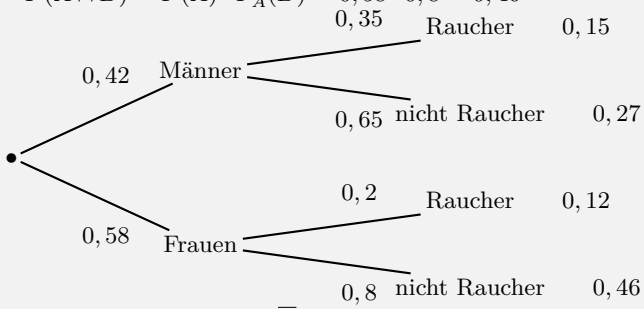
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) \quad | \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \cdot P_B(\overline{A}) \quad | \quad P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A) \quad | \quad P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{A}) \quad | \quad P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$
$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$



42 Prozent der Deutschen sind Männer.
35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.
Männer (A) $P(A) = 0,42$ - Frauen($\overline{A}$) $P(\overline{A}) = 0,58$
Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)
Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B) = 0,35$
nicht Raucher unter den Männern: $P_A(\overline{B}) = 0,65$
Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(B) = 0,2$
nicht Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,8$

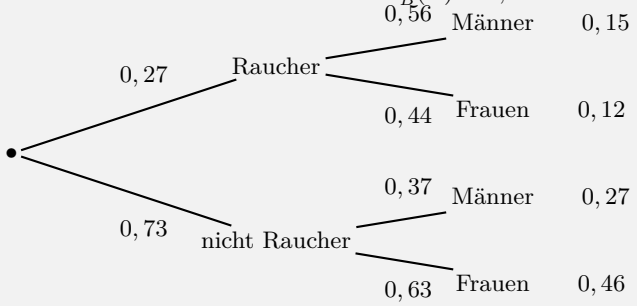
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,42 \cdot 0,35 = 0,15$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = 0,42 \cdot 0,65 = 0,27$
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = 0,58 \cdot 0,2 = 0,12$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,58 \cdot 0,8 = 0,46$



$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,15 + 0,12 = 0,27$
$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,27 + 0,46 = 0,73$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,27} = 0,56$$
$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,27} = 0,44$$
$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,27}{0,73} = 0,37$$
$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,46}{0,73} = 0,63$$

Männer unter den (Bedingung) Rauchern: $P_B(A) = 0,56$
Frauen unter den Rauchern: $P_B(\overline{A}) = 0,44$
Männer unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(A) = 0,37$
Frauen unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0,63$



5.3.6 Vierfeldertafel

Relativer Häufigkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.
1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$
2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$h(A \cap B)$ a	$h(\overline{A} \cap B)$ b	$h(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$h(A \cap \overline{B})$ c	$h(\overline{A} \cap \overline{B})$ d	$h(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$h(A)$ $a+c$	$h(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Relative Häufigkeit der Ausprägung

$h(A), h(B), h(\overline{A}), h(\overline{B})$

$h(B) + h(\overline{B}) = 1 \qquad h(A) + h(\overline{A}) = 1$

Relative Häufigkeit von der Schnittmenge

$h(A \cap B), h(\overline{A} \cap B), h(A \cap \overline{B}, h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(B) = h(A \cap B) + h(\overline{A} \cap B)$

$h(\overline{B}) = h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(A) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B})$

$h(\overline{A}) = h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

Relative Häufigkeiten von der Vereinigungsmenge

$h(A \cup B), h(\overline{A} \cup B), h(A \cup \overline{B}), h(\overline{A} \cup \overline{B})$

$h(A \cup B) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap B)$

$h(\overline{A} \cup B) = h(A \cap B) + h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(A \cup \overline{B}) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(\overline{A} \cup \overline{B}) = h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(A \cup B) = 1 - h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(\overline{A} \cup B) = 1 - h(A \cap \overline{B})$

$h(A \cup \overline{B}) = 1 - h(\overline{A} \cap B)$

$h(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - h(A \cap B)$

Relative Häufigkeit unter einer Bedingung

$$h_A(B) = \frac{h(A \cap B)}{h(A)}$$

$$h_A(\overline{B}) = \frac{h(A \cap \overline{B})}{h/A)}$$

$$h_{\overline{A}}(B) = \frac{h(\overline{A} \cap B)}{h(\overline{A})}$$

$$h_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{h(\overline{B} \cap \overline{B})}{h(\overline{A})}$$

In einer Schulklasse sind 32 Schüler, darunter 18 Mädchen.
6 Mädchen und 8 Jungen sind krank.
1. Merkmal: Mädchen (A) - Jungen($\overline{A}$)
2.Merkmal: Krank(B) - Gesund ($\overline{B}$)

Mädchen: $A = 18$
Jungen: $\overline{A} = 32 - 18 = 14$
kranke Mädchen: $A \cap B = 6$
kranke Jungen: $\overline{A} \cap B = 8$
Kranke: $B = 6 + 8 = 14$
gesunde Mädchen: $A \cap \overline{B} = 18 - 6 = 12$
gesunde Jungen: $\overline{A} \cap \overline{B} = 14 - 8 = 6$

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$A \cap B$ 6	$\overline{A} \cap B$ 8	B 14
$\overline{B}$ Gesund	$A \cap \overline{B}$ 12	$\overline{A} \cap \overline{B}$ 6	$\overline{B}$ 18
$\sum$	A 18	$\overline{A}$ 14	$Insgesamt$ 32

Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$h(A \cap B)$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{A} \cap B)$ $\frac{8}{32}$	$h(B)$ $\frac{14}{32}$
$\overline{B}$ Gesund	$h(A \cap \overline{B})$ $\frac{12}{32}$	$h(\overline{A} \cap \overline{B})$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{B})$ $\frac{18}{32}$
$\sum$	$h(A)$ $\frac{18}{32}$	$h(\overline{A})$ $\frac{14}{32}$	1 $\frac{32}{32}$

Relative Häufigkeit von
Mädchen $h(A) = \frac{18}{32}$ Jungen $h(\overline{A}) = \frac{14}{32}$
Krank $h(B) = \frac{14}{32}$ Gesund $h(\overline{B}) = \frac{18}{32}$
Anzahl der gesunden Mädchen: 12
$h(A \cap \overline{B}) = \frac{12}{32} = 37,5\%$
37,5% der gesamten Schüler sind gesunde Mädchen.
Wieviel Prozent der Mädchen sind gesund?

$$h_A(\overline{B}) = \frac{h(A \cap \overline{B})}{h(A)} = \frac{\frac{12}{32}}{\frac{18}{32}} = \frac{12}{18}$$

Wahrscheinlichkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$.

2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$P(A \cap B)$ a	$P(\overline{A} \cap B)$ b	$P(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$ c	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ d	$P(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$P(A)$ $a+c$	$P(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Wahrscheinlichkeit der Ausprägung

$P(A), P(B), P(\overline{A}), P(\overline{B})$

$P(B) + P(\overline{B}) = 1$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Wahrscheinlichkeit von der Schnittmenge

$P(A \cap B), P(\overline{A} \cap B), P(A \cap \overline{B}, P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Berechnungen mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$

$P(A \cap \overline{B}) = P_A(\overline{B}) \cdot P(A)$

$P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})$

$P(\overline{B} \cap \overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cdot P(\overline{A})$

Wahrscheinlichkeit von der Vereinigungsmenge

$P(A \cup B), P(\overline{A} \cup B), P(A \cup \overline{B} P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{A} \cup B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(A \cup \overline{B}) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B} + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \overline{B})$

$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

42 Prozent der Deutschen sind Männer. 35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.

1.Merkmal: Männer (A) Frauen($\overline{A}$)

2.Merkmal: Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)

$P(A) = 0,42$ $P(\overline{A}) = 1 - 0,42 = 0,58$

Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B) = 0,35$

$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) = 0,35 \cdot 0,42 = 0,15$

Raucher unter den (Bedingung) Frauen: $P_{\overline{A}}(B) = 0,2$

$P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) = 0,2 \cdot 0,58 = 0,12)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,42 - 0,15 = 0,27$

$P(\overline{B}) = 0,58 - 0,12 = 0,46$

$P(B) = 0,15 + 0,12 = 0,27$

$P(\overline{B}) = 1 - 0,27 = 0,73$

	A Männer	$\overline{A}$ Frauen	$\sum$
B Raucher	$P(A \cap B)$ $0,15$	$P(\overline{A} \cap B)$ $0,12$	$P(B)$ $0,27$
$\overline{B}$ nicht Raucher	$P(A \cap \overline{B})$ $0,27$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $0,46$	$P(\overline{B})$ $0,73$
$\sum$	$P(A)$ $0,42$	$P(\overline{A})$ $0,58$	1

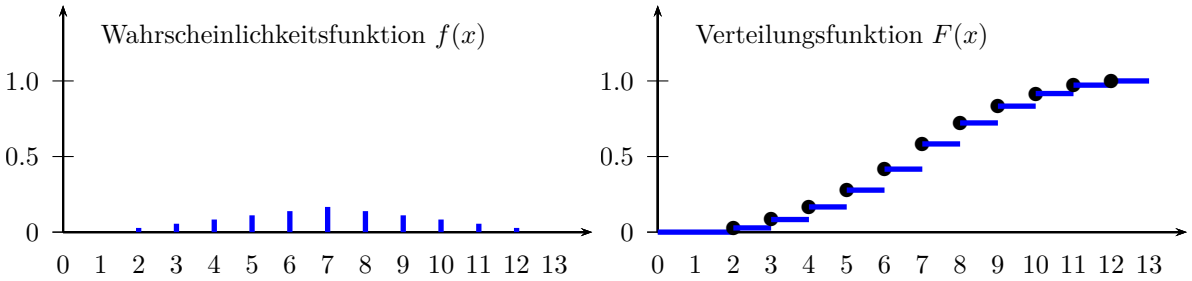
Stochastische Unabhängigkeit

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ A,B unabhängig
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ A,B abhängig

$P(A \cap B) = 0,15$
$P(A) = 0,42$
$P(B) = 0,27$
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
$0,15 \neq 0,42 \cdot 0,27 \Leftrightarrow$ A,B abhängig

5.4 Diskrete Verteilung

5.4.1 Grundlagen



Wahrscheinlichkeitsfunktion - Verteilungsfunktion

- Diskrete Zufallsvariable (Zufallsgröße) X mit ganzzahligen,endlichen Werten: $x_1, x_2, x_3, ...x_n$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion

$P(X = x_i) = f(x_i)$

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4	..	p_n

- Verteilungsfunktion

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(x_i)$$

Würfeln mit zwei Würfeln unterschiedlicher Farbe. Die Zufallsvariable X ist die Summe der Augenzahlen

Ergebnisse	X	P(x)	F(x)
(1,1)	2	1/36	1/36
(1,2);(2,1)	3	2/36	3/36
(1,3);(2,2);(3,1)	4	3/36	6/36
(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)	5	4/36	10/36
(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)	6	5/36	15/36
(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)	7	6/36	21/36
(2,6);(3,5);(4,4);(5,3);(6,2)	8	5/36	26/36
(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)	9	4/36	30/36
(4,6);(5,5);(6,4)	10	3/36	33/36
(5,6);(6,5)	11	2/36	35/36
(6,6)	12	1/36	36/36

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$P(X = 2) = f(2) = 1/36$
$P(X = 3) = f(3) = 2/36$
$P(X = 4) = f(4) = 3/36$
...

Verteilungsfunktion

$$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{i=1}^{2} P(x_i) = 1/36$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = \sum_{i=1}^{3} P(x_i) = 3/36$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = \sum_{i=1}^{4} P(x_i) = 6/36$$

...

Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

• Zufallsvariable (Zufallsgröße) X mit den Werten $x_1, x_2, x_3...$

Wahrscheinlichkeitsfunktion

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4	..	p_n

• Erwartungswert:

$E(x) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + ... + x_n \cdot p_n$

$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

• Varianz:

$Var(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + ...$

$Var(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$

• Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Der Einsatz beim einmaligen Würfeln beträgt 5,- Euro.
Bei einer Sechs erhält man 15,- Euro zurück.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Zufallsvariable: Gewinn

x	-5	10
$P(X=x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = -5 \cdot \frac{5}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} = -2,50 Euro$

Varianz:

$Var(x) = (-5 - (-2,5))^2 \cdot \frac{5}{6} + (10 - (-2,5))^2 \cdot \frac{1}{6} = 31\frac{1}{4}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)} = 5,59$

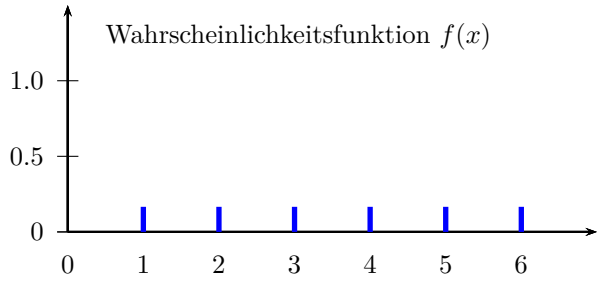
Zufallsvariable: Auszahlungsbetrag

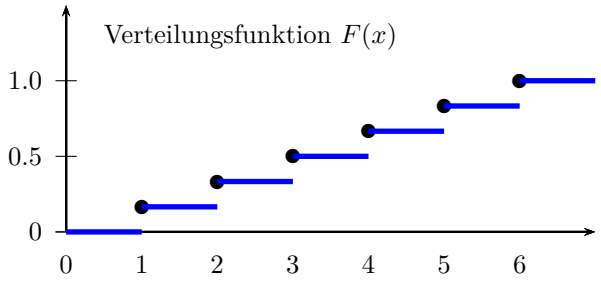
x	0	15
$P(X=x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert: $E(x) = \mu = 0 \cdot \frac{5}{6} + 15 \cdot \frac{1}{6} = 2,5 Euro$

[*Statistik*][*Binomial*]

5.4.2 Diskrete Gleichverteilung





• Diskrete Zufallsvariable (Zufallsgröße) X mit ganzzahligen,endlichen Werten: $x_1, x_2, x_3, ...x_n$

•Wahrscheinlichkeitsfunktions

$P(X = x_i) = f(x_i)$=p

$p = \frac{1}{n}$

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..	x_n
$P(X)$	p	p	p	p	..	p

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..x_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

• Verteilungsfunktion

$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(x_i)$

Würfeln:Die Zufallsvariable X ist die Augenzahl

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x}{6}, & x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..	x_n
$P(X)$	p	p	p	p	..	p

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = x_1 \cdot p + x_2 \cdot p + x_3 \cdot p + ... + x_n \cdot p$

$p = \frac{1}{n}$

$E(x) = \mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)$

$$E(x) = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

• Varianz:

$Var(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p + (x_2 - \mu)^2 \cdot p + (x_3 - \mu)^2 \cdot p + ...$

$p = \frac{1}{n}$

$$Var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

• Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$
$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{6}((1-3,5)^+(2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2 + (6-3,5)^2) = 2.917$

[*Statistik*][*Binomial*]

5.4.3 Binomialverteilung

In einer Urne befinden sich zwei rote und drei blaue Kugeln. Es werden nacheinander zehn Kugeln mit Zurücklegen gezogen.Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?

Wahrscheinlichkeitsfunktion

• Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

$$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

• Voraussetzungen:

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen (Bernoulli-Experiment)
- p - Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
- Stichprobe mit Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich nicht
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs (Bernoullikette der Länge n)
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein.

Zwei Ausgänge: rote oder blaue Kugeln
Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel: $p = \frac{2}{5}$
Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel: $q = 1 - p = \frac{3}{5}$
Anzahl der Versuche: n=10
Genau 2 rote Kugeln: k=2

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
$P(X = 2) = B(10, \frac{2}{5}, 2)$
$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{2}{5})^2 \cdot (1 - \frac{2}{5})^{10-2}$
$P(X = 2) = 0,121$

Verteilungsfunktion

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$$

Binomialverteilung $n = 10 \quad p = \frac{2}{5}$

k	$B(10, \frac{2}{5}, k)$	$F(k)$
0	0,006047	0,006047
1	0,040311	0,046357
2	0,120932	0,167290
3	0,214991	0,382281
4	0,250823	0,633103
5	0,200658	0,833761
6	0,111477	0,945238
7	0,042467	0,987705
8	0,010617	0,998322
9	0,001573	0,999895
10	0,000105	1,000000

Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

- Erwartungswert:

$E(x) = \mu = n \cdot p$

- Varianz:

$Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$

- Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Binomialverteilung
$n = 50 \qquad p = 0,25$
Erwartungswert:
$E(x) = \mu = n \cdot p$
$E(x) = \mu = 50 \cdot \frac{1}{4}$
$E(x) = 12\frac{1}{2}$
Varianz:
$Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$
$Var(x) = 50 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4})$
$Var(x) = 9\frac{3}{8}$
Standardabweichung:
$\sigma = \sqrt{9\frac{3}{8}} = 3,06$

Bereiche der Binomialverteilung

• höchstens k-mal
$P(x \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) = F(k)$
weniger als k-mal
$P(x < k) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n;p;i) = F(k-1)$
• mindestens k-mal
$P(x \geq k) = \sum_{i=k}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k-1)$
• mehr als k-mal
$P(x > k) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k)$
• mindestens 1-mal
$P(x \geq 1) = \sum_{i=1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(0) =$
$1 - B(n;p;0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^n$
• mindestens k1-mal und höchstens k2-mal
$P(k1 \leq X \leq k2) = \sum_{i=k1}^{k2} B(n;p;i) = F(k2) - F(k1-1)$

• mindestens k1-mal und weniger als k2-mal
$P(k1 \leq X < k2) = \sum_{i=k1}^{k2-1} B(n;p;i) =$
$F(k2-1) - F(k1-1)$

• mehr als k1-mal und höchstens k2-mal
$P(k1 < X \leq k2) = \sum_{i=k1+1}^{k2} B(n;p;i) = F(k2) - F(k1)$

• mindestens k1-mal und weniger als k2-mal
$P(k \leq X < k2) = \sum_{i=k1}^{k2-1} B(n;p;i) =$
$F(k2-1) - F(k1-1)$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden ..
genau 2 rote Kugeln
$P(x = 2) = 0,120932$
höchstens 2 rote Kugeln
$P(x \leq 2) = F(2) = \sum_{i=0}^{2} B(10;\frac{2}{5};i) =$
$B(10,\frac{2}{5},0) + B(10,\frac{2}{5},1) + B(10,\frac{2}{5},2) = 0,167290$
weniger als 2 rote Kugeln
$P(x < 2) = F(1) = \sum_{i=0}^{1} B(10;\frac{2}{5};i) =$
$B(10,\frac{2}{5},0) + B(10,\frac{2}{5},1) = 0,046357$
mehr als 2 rote Kugeln
$P(x > 2) == 1 - F(2) = 0,832710$
mindestens 2 rote Kugeln
$P(x \geq 2) = 1 - F(1) = 0,953643$
mindestens 2-mal und höchstens 5-mal
$P(2 \leq X \leq 5) = \sum_{i=2}^{5} B(10;\frac{2}{5};i)$
$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = 0,79$
gezogen

3-mindestens-Aufgabe

P_{min} ist die Mindestwahrscheinlichkeit für mindesten einen Treffer ($x \geq 1$) und der Trefferwahrscheinlichkeit p bei mindestens n Versuchen.
$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

• Gesucht: n - Mindestanzahl der Versuche
$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$
$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$
$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$
$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$
$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad / ln$
$\ln(1 - P_{min}) \geq \ln((1-p)^n)$
$\ln(1 - P_{min}) \geq n \ln((1-p) \qquad / : ln(1-p)$
$\frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)} \leq n$
$n \geq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)}$

• Gesucht: p - Wahrscheinlichkeit eines Treffers
$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$
$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$
$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$
$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$
$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad / \frac{1}{n}$
$(1 - P_{min})^{\frac{1}{n}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$
$p \geq 1 - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen beträgt 20%. Wie viele Lose muss man mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einmal zu gewinnen?
$x \geq 1 \qquad p = 0,2 \qquad P_{min} \geq 0,5$
$P_{0,2}^n(x \geq 1) \geq 0,5$
$1 - P_{0,2}^n(0) \geq 0,5$
$1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot (1-0,2)^n \geq 0,5$
$1 - 0,8^n \geq 0,5 \qquad / - 0,5 / + 0,8^n$
$1 - 0,5 \geq 0,8^n \qquad / ln$
$\ln(0,5) \geq \ln(0,8^n)$
$\ln(0,5) \geq n \ln(0,8) \qquad / : ln(0,8)$
$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)} \leq n$
$n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$
$n \geq 3,1$

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens 40%. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen sein ?
$x \geq 1 \qquad n = 10 \qquad P_{min} \geq 0,4$
$P_p^{10}(x \geq 1) \geq 0,4$
$1 - P_p^{10}(0) \geq 0,4$
$1 - \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} \geq 0,4$
$1 - (1-p)^{10} \geq 0,4 \qquad / - 0,4 / + (1-p)^{10}$
$1 - 0,4 \geq (1-p)^{10} \qquad / \frac{1}{10}$
$(0,6)^{\frac{1}{10}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (0,6)^{\frac{1}{10}}$
$p \geq 1 - (0,6)^{\frac{1}{10}}$
$p \geq 0,05$

Wartezeitaufgaben

• Erster Treffer im n-ten Versuch
$P(E) = (1-p)^{n-1} \cdot p$

• Erster Treffer frühestens im n-ten Versuch
$P(E) = (1-p)^{n-1}$

• Erster Treffer spätestens im n-ten Versuch
$P(E) = 1-(1-p)^{n}$

• k-ter Treffer im n-ten Versuch
$P(E) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p$

• k-ter Treffer frühestens im n-ten Versuch
$P(E) = P(x \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n-1;p;i)$

• k-ter Treffer spätestens im n-ten Versuch
$P(E) = 1 - P(x \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(n;p;i)$

[$P(X=k)$][$F(x)$][$P(k1 \leq X \leq k2)$][$P(X >, \geq, \leq ....k)$]

5.4.4 Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?

Definition

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

• Voraussetzungen:
- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen
- Stichprobe ohne Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich
- N - Anzahl aller Elemente
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs
- K - Anzahl von A unter den N - Elementen
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein

Anzahl der Elemente: N=10
Anzahl der Züge: n=3
Anzahl der roten Kugeln: K=4
Anzahl der gezogenen roten Kugeln: k=2

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}$$
$$P(X=2) = \frac{3}{10}$$

[$P(X=k)$]

5.4.5 Poissonverteilung

• Binomialverteilungen für große n und kleine p.
$P(x) = \frac{\lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!}$
$\lambda = np$
$\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda$

Eine Fabrik produziert 800 Werkstücke mit einem Ausschuss von 0,2%. Berechne die Wahrscheinlichkeit für genau zwei defekte Werkstücke.
Exakte Berechnung durch Binomialverteilung
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
$P(X = 2) = \binom{800}{2} \cdot 0,002^2 \cdot (1 - 0,002)^{800-2}$
$P(X = 2) = 0,258725$
Näherung der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung.
$\lambda = np \quad p = 0.002 \quad n = 800$
$\lambda = 800 \cdot 0,002 = 1,6$
$P(x) = \frac{\lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!}$
$P(2) = \frac{1,6^2 \mathrm{e}^{-1,6}}{2!} = 0,258427$

[*Statistik*][*Binomial*]

5.5 Stetige Verteilung

5.5.1 Grundlagen

- Stetige Zufallsvariable (Zufallsgröße) X mit kontinuierlichen Werten.
- Dichtefunktion: $f(x)$
- Verteilungsfunktion: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
- Erwartungswert: $E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$
- Varianz: $Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(x)}$

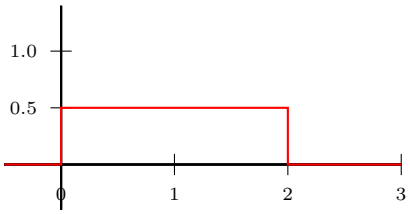
5.5.2 Stetige Gleichverteilung

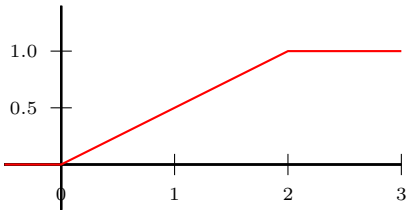
Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 0,5 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,5x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$





- Dichte: $f(x) \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{für } x > b \end{cases}$
- Verteilungsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$
- Erwartungswert: $E(x) = \frac{a+b}{2}$
- Varianz: $Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Stetige Gleichverteilung
Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,5 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$a = 0 \quad b = 2$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

$F(x) = \int_{0}^{x} 0,5du = [0,5u]_0^x = 0,5x$

´oder $F(x) = \frac{x-0}{2-0} = 0,5x$

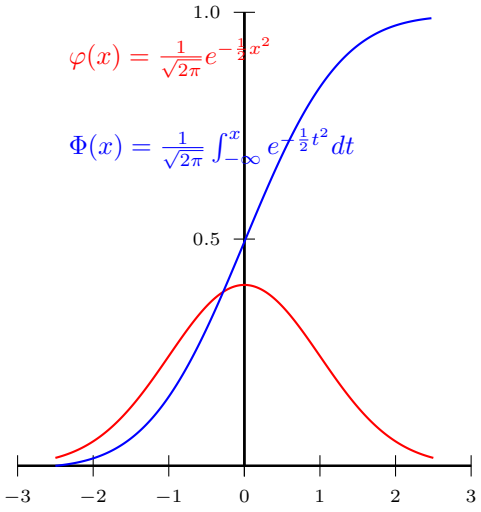
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,5x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

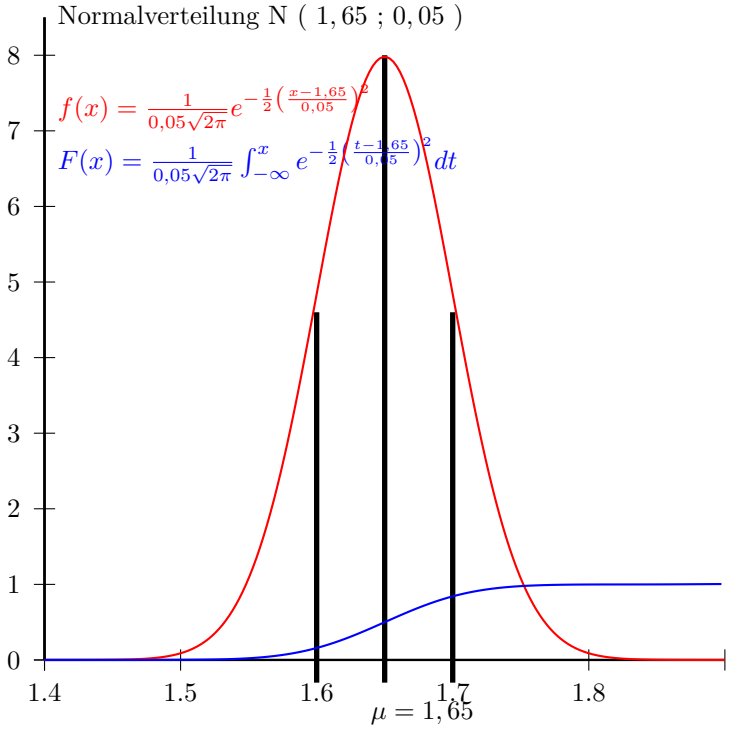
Erwartungswert: $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$
$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{2} x \cdot 0,5\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0\,\mathrm{d}x$
$= \int_{0}^{2} x \cdot 0,5\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2$
$= 1$
oder $E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$

5.5.3 Normalverteilung

Gaußsche Glockenkurve

Standardnormalverteilung (0; 1)





Allgemeine Normalverteilung N(μ ; σ)

μ - Mittelwert σ - Standardabweichung

• Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Eigenschaften:

$f(\mu + x) = f(\mu - x)$ ⇒achsensymmetrisch $x = \mu$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ⇒ horizontale Asymptote $y = 0$

Hochpunkt: HP $(\mu / \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$

Wendepunkte:

WP1 $(\mu - \sigma / \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$,WP2 $(\mu + \sigma / \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$

• Verteilungsfunktion

$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Eigenschaften:

Näherungswerte der Verteilungsfunktion $F(x)$ erhält man durch numerische Integration oder aus einer Tabelle.

$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \approx 68,3\%$;

$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,4\%$;

$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$.

Die Körpergröße bei Frauen in Deutschland ist normalverteilt.

$\mu = 1,65$ $\sigma = 0,05$

Eigenschaften Normverteilung und der Verteilungsfunktion.

$f(x) = \frac{1}{0{,}05\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1{,}65}{0{,}05}\right)^2}$

$f(1,65 + x) = f(1,65 - x)$ ⇒achsensymmetrisch $x = 1,65$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ⇒ horizontale Asymptote $y = 0$

Hochpunkt: HP $(1,65 / \frac{e}{0{,}05\sqrt{2\pi}})$

Wendepunkte:

WP1 $(1,6 / \frac{-1}{0{,}05\sqrt{2\pi e}})$,WP2 $(1,7 / \frac{1}{0{,}05\sqrt{2\pi e}})$

$P(1,65 - 0,05 \leq x \leq 1,65 + 0,05) \approx 68,3\%$;

$P(1,65 - 2 \cdot 0,05 \leq x \leq 1,65 + 2 \cdot 0,05) \approx 95,4\%$;

$P(1,65 - 3 \cdot 0,05 \leq x \leq 1,65 + 3\ cdot 0,05) \approx 99,7\%$. 68 % aller Frauen sind zwischen 160 cm und 170 cm groß.

95 % aller Frauen sind zwischen 155 cm und 175 cm groß.

99,7 % aller Frauen sind zwischen 150 cm und 180 cm groß.

Standardnormalverteilung N(0;1)

$\mu = 0 \qquad \sigma = 1$

• Dichtefunktion

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Eigenschaften:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$\varphi(x) = \varphi(-x) \Rightarrow$ achsensymmetrisch $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ horizontale Asymptote $y = 0$

Hochpunkt: HP $(0/\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$

Wendepunkte:

WP1 $(-1/\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$,WP2 $(1/\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$

• Verteilungsfunktion

$P(X \leq x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

Näherungswerte der Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ erhält man durch numerische Integration oder aus einer Tabelle.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
$P(-1 \leq x \leq 1) \approx 68,3\%$;
$P(-2 \leq x \leq 2) \approx 95,4\%$;
$P(-3 \leq x \leq 3) \approx 99,7\%$

Verteilungsfunktion - Wert aus der Tabelle

Lineare Transformation

Normalverteilung - Standardnormalverteilung

$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

• 1. Schritt

Substitution: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

• 2. Schritt

$\Phi-$Werte aus der Tabelle der Standardnormalverteilung kann man nur ermitteln für:

- höchstens z , wenn $z \geq 0$

$P(Z \leq z) = \Phi(z)$

- höchstens z , wenn $z \leq 0$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

oder

$P(Z \leq z) = 1 - \Phi(|z|)$

• 3. Schritt

- mindestens z

$P(Z \geq z) = 1 - \Phi(z)$

- mindestens z_1 und höchstens z_2

$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

- für symmetrische z-Werte

$P(-z \leq Z \leq z) = 2\Phi(z) - 1$

Die Länge der Schrauben ist normalverteilt. $\mu = 100mm$ $\sigma = 5mm$.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit,
dass eine Schraube kürzer ist als 96 mm ist.
dass eine Schraube länger ist als 103 mm ist.
dass eine Schraube länger ist als 96 mm und kürzer als 103 mm ist.

$P(X \leq 96)$
1.Schritt $z = \frac{96-100}{5} = -0,8$
2.Schritt $P(Z \leq -0,8) = 1 - \Phi(|-0,8|)$
$\Phi-$Wert aus der Tabelle:$\Phi(|-0,8|) = \Phi(0,8) = 0,7881$
$P(Z \leq -0,8) = 1 - 0,7881 = 0,2119$

$P(X \geq 103)$
1.Schritt $z = \frac{103-100}{5} = 0,6$
2.Schritt
$\Phi-$Wert aus der Tabelle:$\Phi(0,6) = 0,7258$
$P(X \geq 103) = 1 - 0,7258$

$P(96 \leq Z \leq 103) = \Phi(0,6) - \Phi(-0,8)$
$P(96 \leq Z \leq 103) = 0,7258 - 0,2119$

Approximationen der Binomialverteilung

Stetigkeitskorrektur
$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{k=x_1}^{x_2} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
$\approx \Phi\left(\frac{x_2+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-0,5-\mu}{\sigma}\right)$

Eine Münze wird 100 mal geworfen. Gesucht die Wahrscheinlichkeit , dass zwischen 45 und 55 mal Kopf geworfen wird.

$\mu = 100 \cdot 0.5 = 50 \quad \sigma = \sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 5$
$P(k1 \leq X \leq k2) = \sum_{i=k1}^{k2} B(n;p;i)$
$P(45 \leq X \leq 55) = \sum_{i=45}^{55} B(100;\frac{1}{2};i)$
$P(45 \leq X \leq 55) = 0,728747$

$P(45 \leq X \leq 55) \approx \Phi\left(\frac{55+0,5-50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{45-0,5-50}{5}\right)$
$P(45 \leq X \leq 55) P(45 \leq X \leq 55) \approx \Phi\left(\frac{55+0,5-50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{45-0,5-50}{5}\right)$
$\Phi(1,1) - \Phi(-1,1) = 2\Phi(1,1) - 1$
Wert aus der Tabelle. $\Phi(1,1) = 0,8643$
$\approx 2 \cdot 0,8643 - 1 = 0,7286$

[hier klicken]

5.5.4 Exponentialverteilung

Exponentialverteilung

- Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0 \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$

5.6 Testen von Hypothesen

5.6.1 Einseitiger Signifikanztest

Ist ein Würfel gezinkt?
Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln ist bei einem nicht gezinkten Würfel: $p = \frac{1}{6}$ (Nullhypothese). Bei einem gezinkten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs: $p > \frac{1}{6}$ (Gegenhypothese und Rechtsseitiger Signifikanztest). Der zu testende Würfel wird 100 mal geworfen (Stichprobenlänge). Man hält den Würfel für nicht gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser höchstens 20 ist (Annahmebereich der Nullhypothese). Man hält den Würfel für gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser mindestens 21 ist (Ablehungsbereich der Nullhypothese).
Zwei Fehler sind bei der Entscheidung möglich:

1. Der Würfel ist nicht gezinkt. Mit viel Glück kann man auch mit einem nicht gezinkten Würfel mehr als 20 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für gezinkt, obwohl er es nicht ist.(Fehler 1. Art)

2. Der Würfel ist gezinkt. Mit viel Pech kann man auch mit einem gezinkten Würfel weniger als 21 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für nicht gezinkt, obwohl er es ist. (Fehler 2. Art).

Ziel ist es die Wahrscheinlichkeit für die Fehler zu berechnen (Irrtumswahrscheinlichkeit).

Definitionen

• Testgröße: Binomial verteilte Zufallsgröße X
• Nullhypothese H_0: Vermutete Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße X
• Gegenhypothese H_1: Alternative Wahrscheinlichkeit
• Stichprobenlänge n : Anzahl der durchgeführten Versuche
• Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich für die Nullhypothese
• Fehler 1. Art (α-Fehler): H_0 wird irrtümlich abgelehnt. Entscheidung gegen H_0, aber H_0 ist richtig.
• Fehler 2. Art (β-Fehler): H_0 wird irrtümlich angenommen. Entscheidung für H_0, aber H_0 ist nicht richtig.
• Irrtumswahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 Art. Berechnung durch: $\alpha = P^n_{p_0}$(Ablehnungsbereich von H_0)
• Signifikanzniveau: maximale Irrtumswahrscheinlichkeit

Testgröße: Anzahl der Sechsen beim Würfeln
Stichprobenlänge $n = 100$
Nullhypothese $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$
Gegenhypothese $H_1 : p > \frac{1}{6}$
Annahmebereich: $A = \{0..20\}$
Annahmebereich: $\overline{A} = \{21..100\}$

Rechtsseitiger Signifikanztest

	Annahmebereich	Ablehnungsbereich
	$A = \{0.....k\}$	$\overline{A} = \{k+1.....n\}$
$H_0 : p \leq p_0$	richtig	Fehler 1. Art
$H_1 : p > p_0$	Fehler 2. Art	richtig

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 ,Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P_{p_0}^n(\overline{A})$

$\alpha = P_{p_0}^n(X \geq k+1) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n; p_0; i)$

$\alpha = 1 - P_{p_0}^n(X \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i) = 1 - F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n,H_0,Signifikanzniveau

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

$P_{p_0}^n(\overline{A}) \leq \alpha$

$P_{p_0}^n(X \geq k+1) \leq \alpha$

$1 - P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$

$P_{p_0}^n(X \leq k) \geq 1 - \alpha$

Aufgabentyp 1

Gegeben:

$n = 100, H_0 : p \leq \frac{1}{6}$

$A\{0..20\}, \overline{A} = \{21..100\}$

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art

$\alpha = P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \geq 21) = \sum_{i=21}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i)$

$\alpha = 1 - P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq 20) = 1 - \sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = 1 - F(20)$

Aus Tafelwerk: $\sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = F(20) = 0,84811$

$1 - 0,84811 = 0,15189$

Irrtumswahrscheinlichkeit $= 15,19\%$

Aufgabentyp 2

Gegeben:

$n = 100; H_0 : p = \frac{1}{6}$

Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$

Gesucht: Entscheidungsregel

$A\{0..k\}; \overline{A}\{k+1..100\}$

$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \geq k+1) \leq 0,05$

$\sum_{i=k+1}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i) \leq 0,05$

$1 - P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \leq 0,05$

$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \geq 1 - 0,05$

$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \geq 0,95$

Aus Tafelwerk: $k = 23$

Entscheidungsregel

$A\{0..23\}; \overline{A}\{24..100\}$

Linksseitiger Signifikanztest

	Ablehnungsbereich	Annahmebereich
	$\overline{A} = \{0.....k\}$	$A = \{k+1.....n\}$
$H_0 : p \geq p_0$	Fehler 1. Art	richtig
$H_1 : p < p_0$	richtig	Fehler 2. Art

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0, Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P_{p_0}^n(\overline{A})$

$\alpha = P_{p_0}^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i) = F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0,Signifikanzniveau α

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

$P_{p_0}^n(\overline{A}) \leq \alpha$

$P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$