Formelsammlung Analytische Geometrie

Unterstützen Sie meine Arbeit durch eine Spende.
http://www.fersch.de
Jeder Spender erhält eine verbesserte und erweiterte Formelsammlung.

©Klemens Fersch

7. Oktober 2026

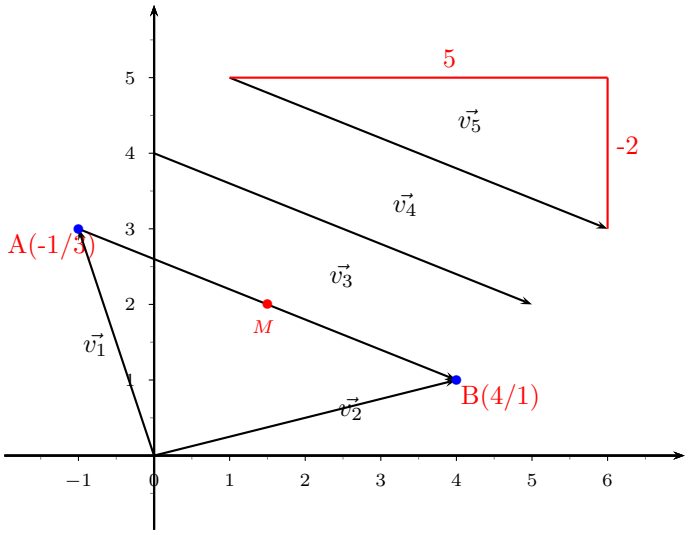
Inhaltsverzeichnis

6 Analytische Geometrie **2**
6.1 Vektorrechung in der Ebene . . . 2
6.1.1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt . . . 2
6.1.2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel . . . 3
6.1.3 Abbildungen . . . 5
6.2 Vektor . . . 9
6.2.1 Vektor - Abstand - Mittelpunkt . . . 9
6.2.2 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit . . . 10
6.2.3 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität . . . 12
6.3 Gerade . . . 14
6.3.1 Gerade aus 2 Punkten . . . 14
6.4 Ebene . . . 15
6.4.1 Parameterform - Normalenform . . . 15
6.4.2 Ebenengleichung aufstellen . . . 16
6.4.3 Parameterform - Koordinatenform . . . 18
6.4.4 Koordinatenform - Parameterform . . . 19
6.4.5 Koordinatenform - Hessesche Normalenform . . . 20
6.5 Kugel . . . 21
6.5.1 Kugelgleichung . . . 21
6.6 Lagebeziehung . . . 22
6.6.1 Punkt - Gerade . . . 22
6.6.2 Gerade - Gerade . . . 23
6.6.3 Punkt - Ebene (Koordinatenform) . . . 24
6.6.4 Gerade - Ebene (Koordinatenform) . . . 25
6.6.5 Ebene - Ebene . . . 26

6 Analytische Geometrie

6.1 Vektorrechung in der Ebene

6.1.1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

- Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleichen Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

- Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge, aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4} = \vec{v_5}$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(x_a/y_a)$ $B(x_b/y_b)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(-1/3)$ $B(4/1)$

Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{29}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = 5,39$$

Steigung der Geraden AB

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Steigung der Geraden AB
$m = \frac{y}{x}$
Winkel des Vektors mit der x-Achse
$\tan\alpha = m$

Steigng der Geraden AB
$m = \frac{-2}{5}$

Mittelpunkt der Strecke AB

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$
$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}\right)$
$M(\frac{x_a+x_b}{2}/\frac{y_a+y_b}{2})$

Mittelpunkt der Strecke AB
$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$
$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$
$M(1\frac{1}{2}/2)$

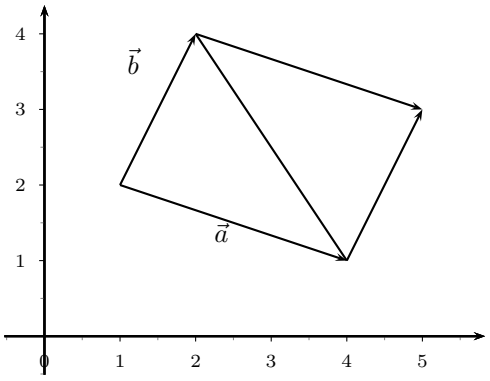
Vektorkette

Punkt: $A(x_a/y_a)$
Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v} \qquad \vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A(-1/3) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
$B(4/1)$

[hier klicken]

6.1.2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel



$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Steigung der Vektoren

$m_a = \frac{y_a}{x_a} \qquad m_a = \frac{y_b}{x_b}$
$m_a = m_b \Rightarrow$ Vektoren sind parallel

Steigung
$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$
$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{2}{1} = 2$

Skalarprodukt

$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$
Senkrechte Vektoren:
$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + -1 \cdot 2 = 1$

Fläche aus 2 Vektoren

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$
$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$
Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$
$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b)$

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$
$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - -1 \cdot 1 = 7$
Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$
$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 3\frac{1}{2}$

Winkel zwischen Vektoren

$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$
$\cos \alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$

Schnittwinkel:
$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$
$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 1 + -1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$
$\cos \alpha = \left| \frac{1}{3,16 \cdot 2,24} \right|$
$\cos \alpha = |0,141|$
$\alpha = 81,9$

[hier klicken]

6.1.3 Abbildungen

Lineare Abbildung in Matrixform - Koordinatenform

Matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + e \\ c \cdot x + d \cdot y + f \end{pmatrix}$$

$$x' = a \cdot x + b \cdot y + e \qquad y' = c \cdot x + d \cdot y + f$$

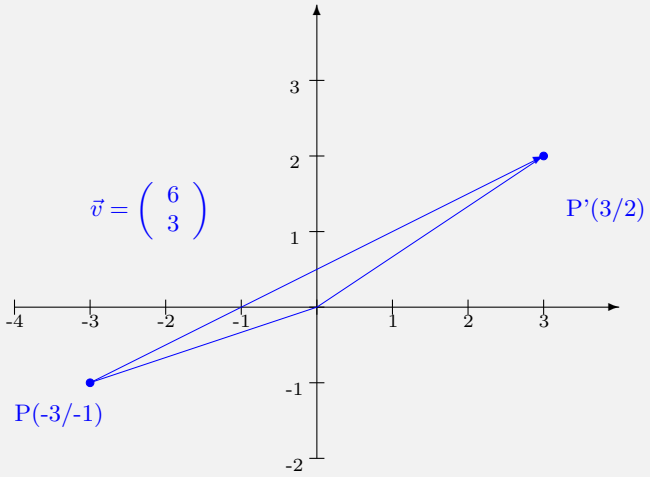
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Verschiebung

Punkt: $P(x_p/y_p)$

Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$
$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$
$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$P(-3/-1) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$
$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$P'(3/2)$

Spiegelung an den Koordinatenachsen

Spiegelung an der x–Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \qquad y' = -y$$

Spiegelung an der y–Achse

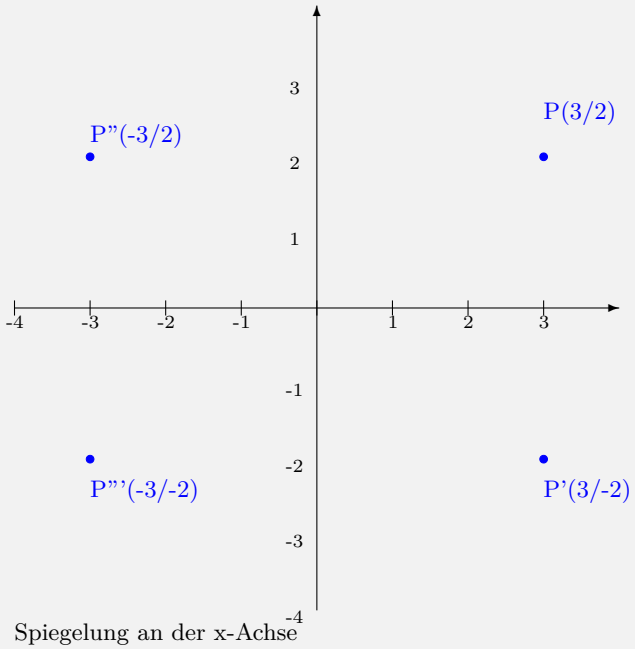
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = y$$

Spiegelung am Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = -y$$



Spiegelung an der x-Achse
$P(3/2) \longmapsto P'(3/-2)$
Spiegelung an der y-Achse
$P(3/2) \longmapsto P''(-3/2)$
Spiegelung am Ursprung
$P(3/2) \longmapsto P'''(-3/-2)$

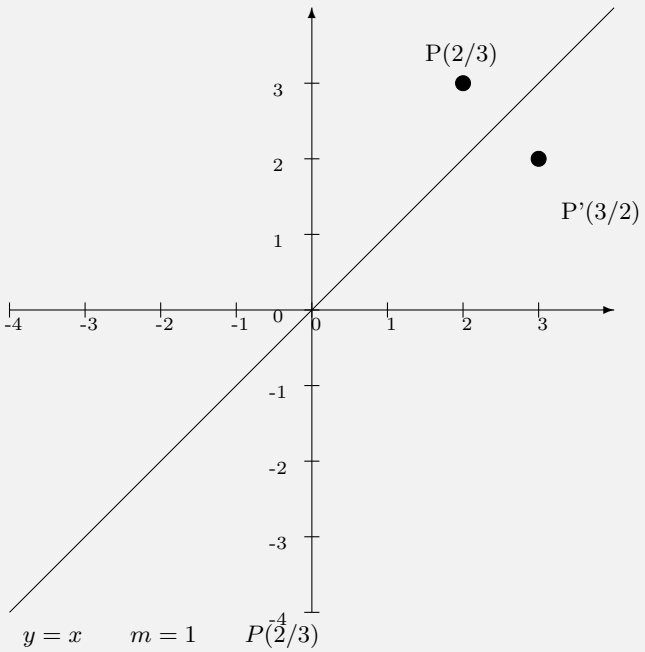
Spiegelung an der Ursprungsgeraden

$$y = m \cdot x \qquad \tan\alpha = m$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \qquad y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$$



$y = x \qquad m = 1 \qquad P(2/3)$
$\tan\alpha = 1 \qquad \alpha = 45°$
$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha$
$x' = 2 \cdot \cos 2 \cdot 45° + 3 \cdot \sin 2 \cdot 45°$
$x' = 3$
$y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$
$y' = 2 \cdot \sin 2 \cdot 45° - 3 \cdot \cos 2 \cdot 45°$
$y' = 2$
$P(2/3) \longmapsto P'(3/2)$

Zentrische Streckung

Streckzentrum: $Z(0/0)$
Streckungsfaktor :k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

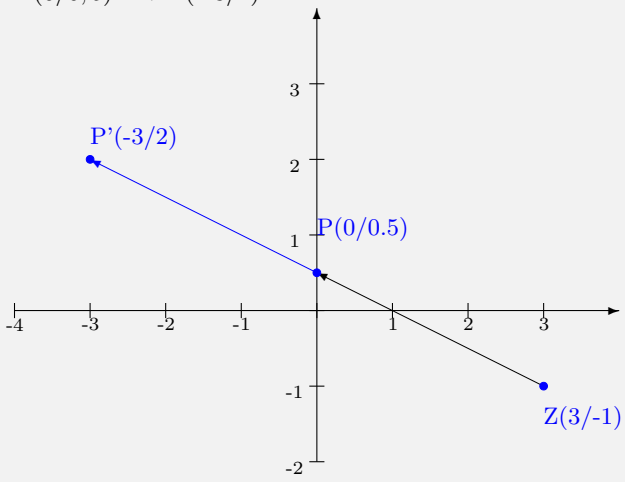
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

Streckzentrum: $Z(x_z/y_z)$
Streckungsfaktor:k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$
Vektorform

$$\vec{ZP'} = k \cdot \vec{ZP}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} - x_Z \\ y_{P'} - y_Z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

$P(0/0,5) \longmapsto P(-3/2)$



Streckzentrum: $Z(3/-1)$
Streckungsfaktor:2
Urpunkt: $P(0/0,5)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0,5-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P'(-3/2)$

Drehung um den Ursprung

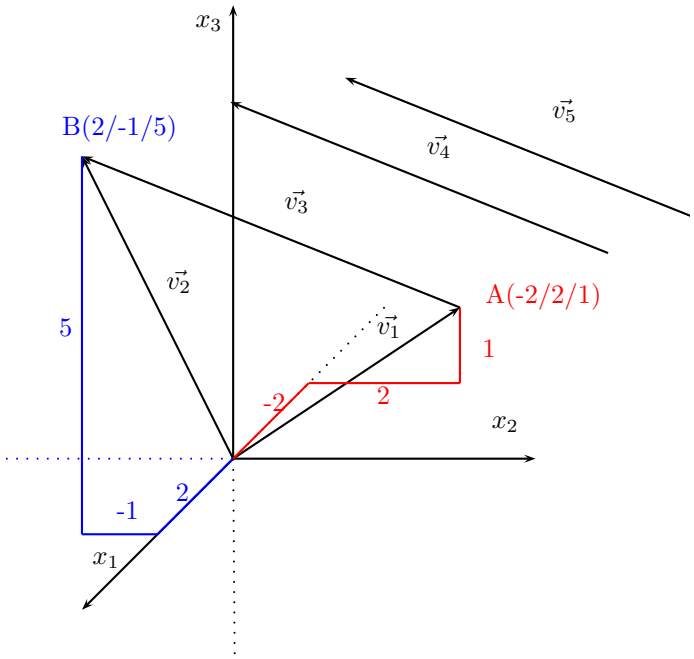
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \qquad y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

Orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$
$$x' = x \qquad y' = k \cdot y$$

6.2 Vektor

6.2.1 Vektor - Abstand - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

- Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleichen Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge, aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4} = \vec{v_5}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = -\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(-2/2/1)$ $B(2/-1/5)$

Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 4^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{41}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = 6,4$$

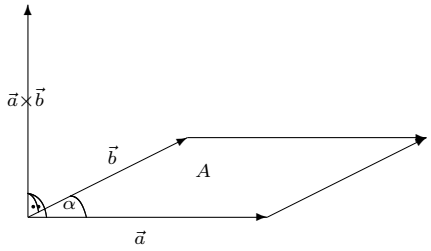
Mittelpunkt der Strecke AB

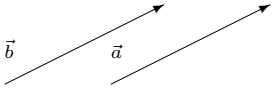
$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)$$
$$M(\tfrac{a_1+b_1}{2} / \tfrac{a_2+b_2}{2} / \tfrac{a_3+b_3}{2})$$

Mittelpunkt der Strecke AB
$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$M(0/\tfrac{1}{2}/3)$$

[hier klicken]

6.2.2 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit





$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Länge der Vektoren:
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$
$$|\vec{a}| = 3$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = 3$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Senkrechte Vektoren:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Skalarprodukt:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 = -7$

Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2} \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$

$|\vec{c}| = 5,657$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\alpha = \left|\frac{-7}{3 \cdot 3}\right|$$

$\cos\alpha = \left|-\frac{7}{9}\right|$

$\alpha = 38,942$

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{array}{lllll} a_1 & = & b_1 k & / : b_1 & \Rightarrow k_1 \\ a_2 & = & b_2 k & / : b_2 & \Rightarrow k_2 \\ a_3 & = & b_3 k & / : b_3 & \Rightarrow k_3 \end{array}$$

$k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$

Vekoren sind linear abhängig - parallel

nicht alle k gleich $\Rightarrow$

Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

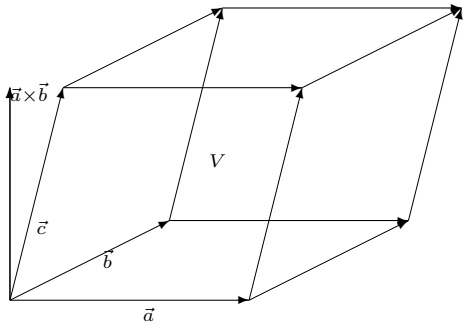
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

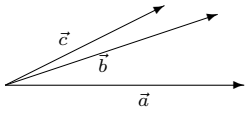
$$\begin{array}{lllll} 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \\ 1 & = & 1k & / : 1 & \Rightarrow k = 1 \\ 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

[hier klicken]

6.2.3 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität





$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Spatprodukt: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=$

$$\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Vektorprodukt von $\vec{a},\vec{b}$ skalar multipliziert mit $\vec{c}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\cdot 2-4\cdot(-7)\\4\cdot(-4)-2\cdot 3\\3\cdot(-7)-(-3)\cdot(-4)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}22\\-22\\-33\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}=44$$

Spatprodukt = Wert der Determinante

Spatprodukt: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=a_1\cdot b_2\cdot c_3+b_1\cdot c_2\cdot a_3+c_1\cdot a_2\cdot b_3$
$-c_1\cdot b_2\cdot a_3-a_1\cdot c_2\cdot b_3-b_1\cdot a_2\cdot c_3$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}3 & -4 & 7 & 3 & -4\\-3 & -7 & 2 & -3 & -7\\4 & 2 & 2 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$D=3\cdot(-7)\cdot 2+(-4)\cdot 2\cdot 4+7\cdot(-3)\cdot 2$
$-7\cdot(-7)\cdot 4-3\cdot 2\cdot 2-(-4)\cdot(-3)\cdot 2$
$D=44$

Spatprodukt - Volumen

•Volumen von Prisma oder Spat
$V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
•Volumen einer Pyramide mit den Grundflächen:
Quadrat,Rechteck,Parallelogramm
$V=\frac{1}{3}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
• Volumen ein dreiseitigen Pyramide
$V=\frac{1}{6}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$V=\begin{vmatrix}3 & -4 & 7 & 3 & -4\\-3 & -7 & 2 & -3 & -7\\4 & 2 & 2 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$V=3\cdot(-7)\cdot 2+(-4)\cdot 2\cdot 4+7\cdot(-3)\cdot 2$
$-7\cdot(-7)\cdot 4-3\cdot 2\cdot 2-(-4)\cdot(-3)\cdot 2$
$V=44$

Eigenschaften von 3 Vektoren

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- sind linear abhängig
- liegen in einer Ebene (komplanar)
- sind keine Basisvektoren
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 44$

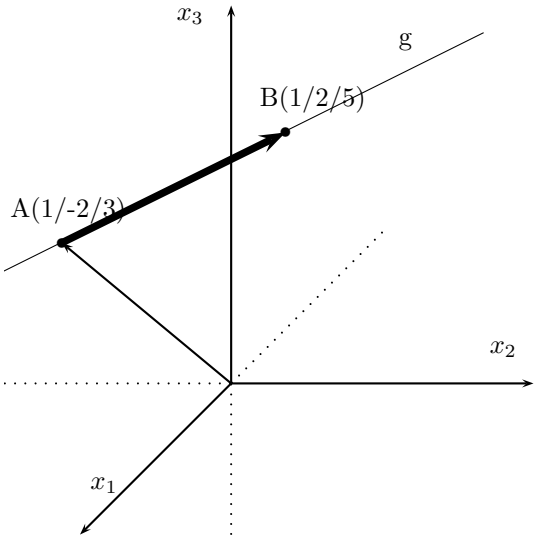
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

[hier klicken]

6.3 Gerade

6.3.1 Gerade aus 2 Punkten



Punkte: $A(a_1/a_2/a_3) \quad B(b_1/b_2/b_3)$

Richtungsvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkt A oder B als Aufpunkt wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(1/-2/3) \quad B(1/2/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2+2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Besondere Geraden

x_1 – Achse: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

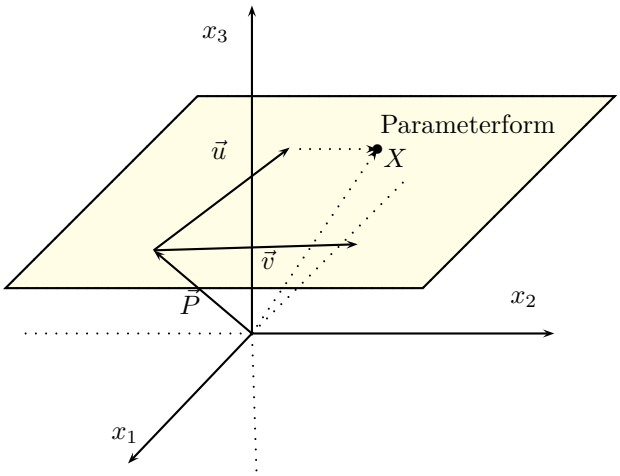
x_2 – Achse: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

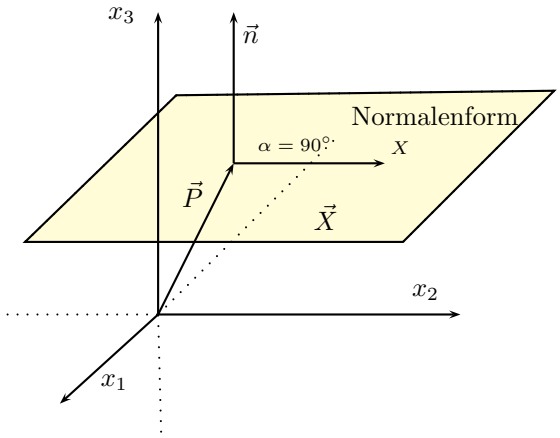
x_3 – Achse: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[hier klicken]

6.4 Ebene

6.4.1 Parameterform - Normalenform





Parameterform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene
$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)
$\vec{u}, \vec{v}$ - linear unabhängige Richtungsvektoren
λ, σ-Parameter
$\vec{x} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \vec{v}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Normalenform - Koordinatenform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene
$\vec{n}$ - Normalenvektor
$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)
$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

$n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$
$n_1x_1 - n_1p_1 + n_2x_2 - n_2p_2 + n_3x_3 - n_3p_3 = 0$
$c = -(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3)$
$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
Punkt in der Ebene $P(2/-1/1)$
Nomalenform:
$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \cdot\vec{p}) = 0$

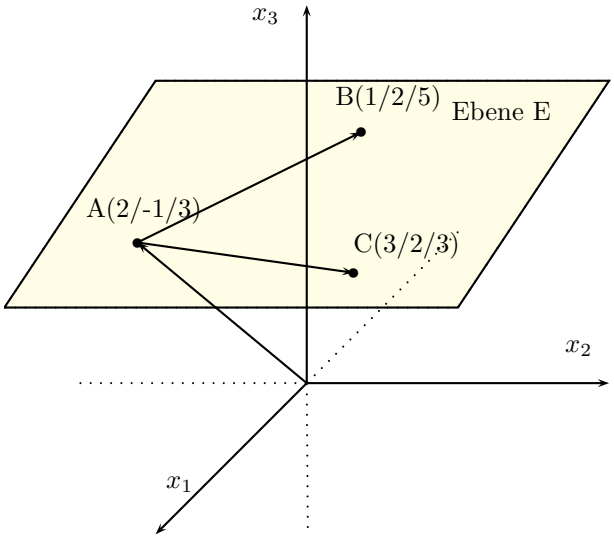
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:
$1(x_1 - 2) + 2(x_2 + 1) - 3(x_3 - 1) = 0$
$x1 + 2x_2 - 3x_3 + 3 = 0$

Besondere Ebenen

Ebene	Parameterform	Koordinatenform
$x1-x2$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$x_3=0$
$x1-x3$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$x_2=0$
$x2-x3$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$x_1=0$

6.4.2 Ebenengleichung aufstellen



Ebene aus 3 Punkten

Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)\quad B(b_1/b_2/b_3)\quad C(c_1/c_2/c_3)$

Die 3 Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Ebene aus drei Punkten:

Richtungsvektor: $\vec{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$

Richtungsvektor: $\vec{AC}=\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$

Ebenengleichung aus Aufpunkt und den Richtungsvektoren.

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$$

Punkte: $A(2/-1/3)\quad B(1/2/5)\quad C(3/2/3)$

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}1-2\\2+1\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC}=\begin{pmatrix}3-2\\2+1\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

Ebene aus Gerade und Punkt

Der Punkt darf nicht auf der Geraden liegen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

Richtungsvektor zwischen Aufpunkt A und dem Punkt C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt: $C(2/0/1)$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei echt parallelen Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei parallelen Geraden sind Richtungsvektoren linear abhängig. Für die Ebenengleichung muss ein 2. Richtungsvektor erstellt werden. 2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} 2 & = & +4k & / : 4 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ 0 & = & +0k & / : 0 \quad \Rightarrow k = beliebig \\ -1 & = & -2k & / : -2 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt: $A(3/4/5)$

$$\begin{array}{rcll} 3 & = & 1 \quad +2\lambda & / -1 \\ 4 & = & 3 \quad +0\lambda & / -3 \\ 5 & = & 0 \quad -1\lambda & / -0 \\ 2 & = & 2\lambda & / : 2 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 & = & 0\lambda & \Rightarrow \text{falsch} \\ 5 & = & -1\lambda & / : -1 \quad \Rightarrow \lambda = -5 \end{array}$$

$\Rightarrow$

Geraden sind echt parallel

2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei sich schneidenden Geraden sind Richtungsvektoren linear unabhängig.

Ebenengleichung in Parameterform

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(5, -9, 0)$

Ebenengleichung in Parameterform

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

[3 Punkte][Punkt und Gerade][Parallele Geraden]

6.4.3 Parameterform - Koordinatenform

1. Methode: Determinante

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - a_1 & b_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 \end{matrix} = 0$

$(x_1 - a_1) \cdot b_2 \cdot c_3 + b1 \cdot c_2 \cdot (x_3 - a_3) +$

$c1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot b_3 - c1 \cdot b2 \cdot (x_3 - a_3) -$

$(x_1 - a_1) \cdot c_2 \cdot b_3 - b1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot c_3 = 0$

Koordinatenform:

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -2 & 2 \\ x_2 + 3 & 4 & -5 \\ x_3 - 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - 1 & -2 \\ x_2 + 3 & 4 \\ x_3 - 2 & 3 \end{matrix} = 0$

$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-5) \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 3) \cdot 3 -$

$2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot (-5) \cdot 3 - (-2) \cdot (x_2 + 3) \cdot 0 = 0$

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

Koordinatenform:

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

2. Methode: Vektorprodukt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - c_3 \cdot b_1 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene und Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + k = 0$

k berechnen

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + k = 0$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-7) + k = 0$

$k = -4$

Koordinatenform

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$

[Determinante][Vektorprodukt]

6.4.4 Koordinatenform - Parameterform

1. Methode

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}x_1 - \frac{n_2}{n_3}x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}\lambda - \frac{n_2}{n_3}\sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k}{n_3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{2}{2} - \frac{4}{2}x_1 - \frac{8}{2}x_2$

$x_3 = 1 - 2x_1 - 4x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = 1 - 2\lambda - 4\sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$4x_1 - 2 = 0$

•x_2 durch einen Parameter ersetzen

$x_2 = \lambda$

•x_3 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_3 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_1 auflösen

$x_1 = \frac{1}{2}$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = \frac{1}{2} + 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_3 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Methode

- Drei beliebige Punkte, die in der Ebene liegen ermitteln.
- Die Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein.
- Ebenengleichung aus 3 Punkten aufstellen.

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$
•$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$ frei wählen und in die Ebenengleichung einsetzen.$\Rightarrow x_3 = 1$ und $P_1(0/0/1)$
• 2 weitere Punkte ermitteln: $P_2(1/0/-1) \quad P_3(0/1/-3)$
• Die Richtungvektoren sind linear unabhängig:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
• Parameterform der Ebene
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

6.4.5 Koordinatenform - Hessesche Normalenform

Koordinatenform:
$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$
Normalenvektor
$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$
Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
Hessesche Normalenform:
$k1 < 0$
HNF: $\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$
$k1 > 0$
HNF: $\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

[hier klicken]

Koordinatenform:
$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$
Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 6^2 + 2^2}$
$|\vec{n}| = 16,3$
Hessesche Normalenform:
HNF: $\dfrac{15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1}{16,3} = 0$

6.5 Kugel

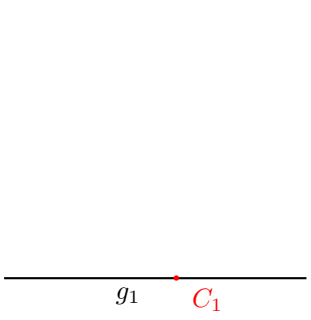
6.5.1 Kugelgleichung

$M(m_1/m_2/m_3)$ - Mittelpunkt der Kugel
r - Radius der Kugel
$X(x_1/x_2/x_3)$ - beliebiger Punkt auf der Kugel
Kugelgleichung:
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

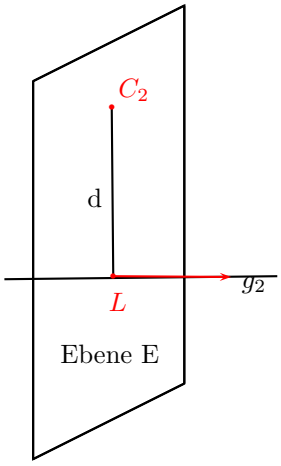
$M(3/2/-4)$ – Mittelpunkt der Kugel
$r = 6$ – Radius der Kugel
$X(x_1/x_2/x_3)$ – beliebiger Punkt auf der Kugel
Kugelgleichung:
$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = 6^2$

6.6 Lagebeziehung

6.6.1 Punkt - Gerade



Punkt C_1 liegt auf der Geraden g_1



Abstand d des Punktes C_2 von der Geraden g_2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

$$\begin{array}{rcrcll} c_1 = & a_1 & + & b_1\lambda_1 & \Rightarrow \lambda_1 \\ c_1 = & a_2 & + & b_2\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 \\ c_1 = & a_3 & + & b_3\lambda_3 & \Rightarrow \lambda_3 \end{array}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$

Punkt liegt auf der Geraden

nicht alle λ gleich $\Rightarrow$

Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Die Koordinatenform der Ebenengleichung aufstellen, die senkrecht zur Geraden ist und den Punkt C enthält.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

Abstand des Punktes, ist die Länge des Vektors $\vec{LC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Punkt: } C(7, 9, -6)$$

$$\begin{array}{rcrcll} 7 & = & 1 & -2\lambda & / -1 & \\ 9 & = & 3 & -2\lambda & / -3 & \\ -6 & = & -3 & +2\lambda & / +3 & \\ 6 & = & -2\lambda & & / : -2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ 6 & = & -2\lambda & & / : -2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ -3 & = & 2\lambda & & / : 2 & \Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktens berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + k = 0$

C ist Punkt in der Ebene

$-2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot (-6) + k = 0$

$k = 44$

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$\begin{array}{rcrl} x_1 = & 1 & -2\lambda & \\ x_2 = & 3 & -2\lambda & \\ x_3 = & -3 & +2\lambda & \end{array}$$

$-2(1 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 44 = 0$

$12\lambda + 30 = 0$

$\lambda = \frac{-30}{12}$

$\lambda = -2\frac{1}{2}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: $L(6, 8, -8)$

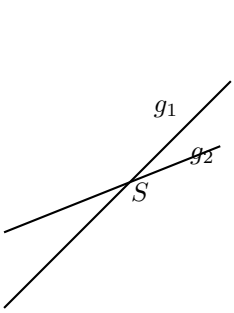
$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 30 - 9 \\ -2\frac{1}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

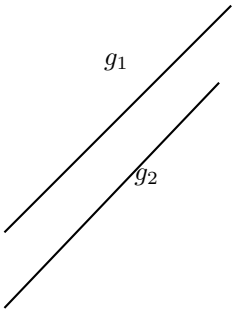
$$\left|\vec{CL}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

[hier klicken]

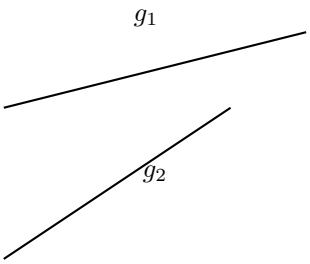
6.6.2 Gerade - Gerade



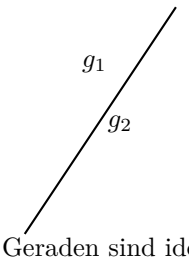
Geraden schneiden sich



Geraden sind parallel



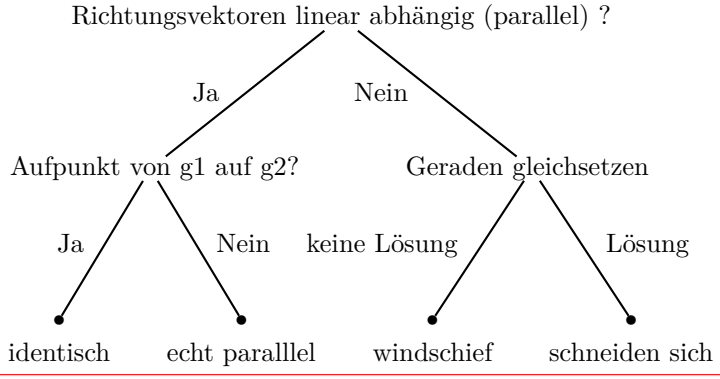
Geraden sind windschief



Geraden sind identisch

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$



Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} 4 & = & -4k & / : -4 \quad \Rightarrow k = -1 \\ -7 & = & -4k & / : -4 \quad \Rightarrow k = 1\frac{3}{4} \\ -8 & = & -3k & / : -3 \quad \Rightarrow k = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcrll} 1 & +4\lambda & = & 9 & -4\sigma & / -1 \quad / +4\sigma \\ -2 & -7\lambda & = & -5 & -4\sigma & / +2 \quad / +4\sigma \\ 8 & -8\lambda & = & 3 & -3\sigma & / -8 \quad / +3\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I & 4\lambda + 4\sigma = 8 \\ II & -7\lambda + 4\sigma = -3 \\ III & -8\lambda - 3\sigma = -5 \end{array}$$

Aus den Gleichungen I und II λ und σ berechnen

$\sigma = 1$

$\lambda = 1$

λ und σ in die verbleibende Gleichung einsetzen

$III \quad 8 + 1 \cdot (-8) = 3 + 1 \cdot (-3)$

$0 = 0$

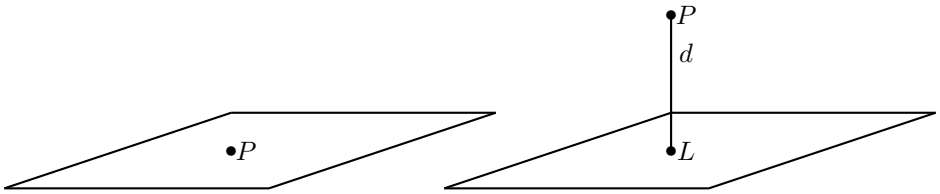
λ oder σ in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S(5, -9, 0)$

[hier klicken]

6.6.3 Punkt - Ebene (Koordinatenform)



Punkt liegt in der Ebene Punkt liegt nicht in der Ebene

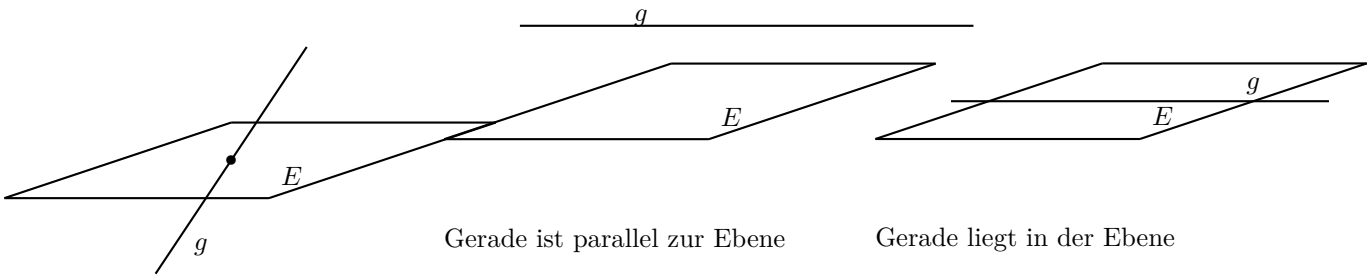
Punkt: $A(a_1/a_2/a_3)$
Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$
$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c_1 = 0$
• Liegt der Punkt in der Ebene?
Punkt in die Ebene einsetzen.
Gleichung nach Umformung: $0 = 0 \Rightarrow$ Punkt liegt in der Ebene
• Abstand Punkt - Ebene
Punkt in die HNF einsetzen.

Punkt: $A(1/2/0)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 = 0$
$0 = 0$
Punkt liegt in der Ebene

Punkt: $A(2/-4/3)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7 = 0$
$20 = 0$
Punkt liegt nicht in der Ebene
Abstand des Punktes von der Ebene
Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF
$-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$
$|\vec{n}| = 3,32$
HNF:
$\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7}{-3,32} = 0$
Punkt in HNF:
$d = |\frac{-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7}{-3,32}|$
$d = |-6,03|$
$d = 6,03$

[hier klicken]

6.6.4 Gerade - Ebene (Koordinatenform)



Gerade schneidet Ebene

Gerade ist parallel zur Ebene

Gerade liegt in der Ebene

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

Gerade1 in Punktdarstellung

$x_1 = a_1 + b_1\lambda$

$x_2 = a_2 + b_2\lambda$

$x_3 = a_3 + b_3\lambda$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1 + b_1\lambda) + n_2(a_2 + b_2\lambda) + n_3(a_3 + b_3\lambda) + c_1 = 0$

Die Gleichung nach der Variablen auflösen.

• Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. Variable in die Gerade einsetzen

• Geraden und Ebene sind parallel

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

• Gerade liegt in der Ebene

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung:$0 = 0$

[hier klicken]

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 10 = 0$

$x_1 = 3 + 4\lambda$

$x_2 = 5 + 5\lambda$

$x_3 = 7 + 5\lambda$

$1(3 + 4\lambda) - 2(5 + 5\lambda) + 5(7 + 5\lambda) + 10 = 0$

$19\lambda + 38 = 0$

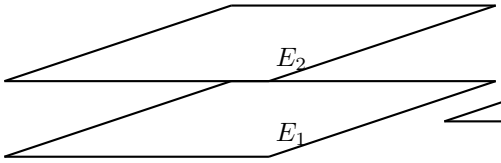
$\lambda = \frac{-38}{19}$

$\lambda = -2$

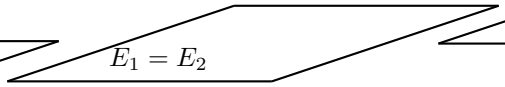
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $S(-5, -5, -3)$

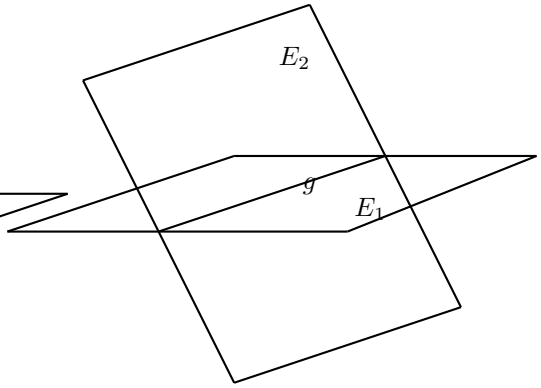
6.6.5 Ebene - Ebene



Ebenen sind parallel



Ebenen sind identisch



Ebenen schneiden sich

Parameterform - Koordinatenform

Parameterform - Ebene1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform - Ebene2

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$

Ebene1 in Punktdarstellung

$x_1 = a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma$
$x_2 = a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma$
$x_3 = a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma) +$
$n_2(a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma) +$
$n_3(a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma) + k1 = 0$

Die Gleichung nach einer Variablen auflösen

• Schnittgerade zwischen den Ebenen

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. λ oder σ in die Parameterform einsetzen

• Ebenen sind parallel

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

• Ebenen sind identisch

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $0 = 0$

Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 = 0$

$x_1 = \quad -2 \quad +1\lambda \quad +0\sigma$
$x_2 = \quad -4 \quad +2\lambda \quad -1\sigma$
$x_3 = \quad 2 \quad +2\lambda \quad -1\sigma$

$1(-2 + 1\lambda + 0\sigma) + 1(-4 + 2\lambda - 1\sigma) + 0(2 + 2\lambda - 2\sigma) + 0 = 0$
$3\lambda - 1\sigma - 6 = 0$

$\sigma = \frac{-3\lambda+6}{-1}$
$\sigma = 3\lambda - 6$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Parameterform - Parameterform

Eine Ebene in die Koordinatenform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Koordinatenform - Koordinatenform

Eine Ebene in die Parameterform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

[hier klicken]